

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ СМЕЩЕНИЯ ВАКУУМА В СИСТЕМЕ "MATHEMATICA"

Г.Г. Исламов

(ИМИТиФ УдГУ, Ижевск)

1. Сакс Р. С. *Решение спектральных задач для операторов ротора и Стокса* // Уфимск. матем. журн., 5:2 (2013), 63–81 .
2. Исламов Г.Г. *Об одном классе векторных полей* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 19:4 (2015), 680–696

Обе работы посвящены спектральной задаче для ротора

$$\lambda F = \operatorname{rot} F$$

в шаре заданного радиуса R в трёхмерном пространстве R^3 .

В первой работе найдено представление всех решений, “приглаженных” на границе указанного шара.

Во второй статье указаны два решения $P(r, \theta, \phi)$ и $Q(r, \theta, \phi)$, которые сингулярны в полюсах шара радиуса R .

Исследования первого автора инициированы задачей полного описания движения плазмы в заданном шаре.

Решения P и Q , найденные в нашей работе, используются

для описания поля смещения вакуума

$$u(r, \theta, \phi; t) = P(r, \theta, \phi) * \text{Cos}[\omega t] + Q(r, \theta, \phi) * \text{Sin}[\omega t].$$

Это смещение вакуума порождает электромагнитное поле без источников.

При этом электрический вектор поля равен

$$E(r, \theta, \phi; t) = \omega^2 * u(r, \theta, \phi; t),$$

а вектор магнитной индукции

$$B(r, \theta, \phi; t) = \lambda * \omega * (Q(r, \theta, \phi) * \text{Cos}[\omega t] - P(r, \theta, \phi) * \text{Sin}[\omega t]).$$

Заметим, что $\omega = \lambda * C$, где C - скорость света в вакууме.

Ниже предлагаются анимационные программы, назначение которых будет описано в процессе работы.

Осцилляция векторов электрической напряжённости и индукции - локального электромагнитного поля

```
In[1]= ClearAll[s, R, ω, α, β, γ, T]
|очистить всё
Print[
|печатать
  "Переменные сферической системы координат: 0 ≤ r ≤ R, 0 ≤ θ < π, 0 ≤ φ < 2π"];
Print["Формулы перехода от криволинейной системы к декартовой"];
|печатать
x = r * Sin[θ] Cos[φ];
|синус |косинус
y = r * Sin[θ] Sin[φ];
|синус |синус
z = r * Cos[θ];
|косинус
Print["Радиус-вектор точки M(x, y, z)"]
|печатать
```

```

печатаТЬ
M = {x, y, z};
Print["Подвижный репер ( $\hat{i}_r, \hat{i}_\theta, \hat{i}_\phi$ ):"]
печатаТЬ
 $\hat{i}_r = \partial_r M // Simplify$ 
    упростить
 $\hat{i}_\theta = \partial_\theta M // Simplify$ 
    упростить
 $\hat{i}_\phi = \partial_\phi M // Simplify$ 
    упростить

Print["Стационарные поля смещения вакуума:"]
печатаТЬ
P0 = {(1/r^2) Sin[λ r], (λ/r) Cos[λ r] Cot[θ], -(λ/r) Sin[λ r] Cot[θ]};
    синус    косинус    котангенс    синус    котангенс
Q0 = {0, -(1/r) Cos[λ r] Csc[θ], (1/r) Sin[λ r] Csc[θ]};
    косинус    cosecant    синус    cosecant

"Normalization"
P1 = P0/Sqrt[Integrate[P0.P0 (r^2/Csc[θ]^2), {r, 0, R}, {θ, 0, Pi}]];
    ква...    интегрировать    cosecant    число пи
Q1 = Q0/Sqrt[Integrate[Q0.Q0 (r^2/Csc[θ]^2), {r, 0, R}, {θ, 0, Pi}]];
    ква...    интегрировать    cosecant    число пи
FH[t_] = ω^2 (P1 * Cos[ω t] + Q1 * Sin[ω t]);
    косинус    синус
GB[t_] = ω (Q1 * Cos[ω t] - P1 * Sin[ω t]);
    косинус    синус

Print["Проверка равенства спектральной задачи λF[t]= rotF[t]"]
печатаТЬ
λ * FH[t] - Curl[FH[t], {r, θ, φ}, "Spherical"] // Simplify
    ротор    упростить

Print["Наименьшее собственное значение:"]
печатаТЬ
λ = Pi
    число пи

Print["Радиус шара моделирования:"]
печатаТЬ
R = 1

Print["Частота осцилляций нестационарного поля смещения вакуума"]
печатаТЬ
ω = 0.1

Print["Динамика поля электрической напряжённости:"]
печатаТЬ
Animate[VectorPlot3D[FH[t], {r, 0, R}, {θ, 0, Pi},
    анимиро...    векторная диаграмма в пространстве    число пи
    {φ, 0, 2 Pi}, VectorPoints → 20, VectorScale → 0.012], {t, 0, 1000}];
    чис...    число векторов    масштаб векторов

Print["Динамика поля магнитной индукции:"]
печатаТЬ

```

```

[печатать]
Animate[VectorPlot3D[GB[t], {r, 0, R}, {θ, 0, Pi},
[анимиро... [векторная диаграмма в пространстве [число пи
    {φ, 0, 2 Pi}, VectorPoints → 20, VectorScale → 0.012], {t, 0, 1000}];
    [чис... [число векторов [масштаб векторов

Print["Осцилляция поля электрической напряжённости:"]
[печатать]
Animate[ParametricPlot3D[FH[t], {r, 0, R}, {θ, 0, Pi}], {t, 0, 1000}];
[анимиро... [график параметрически заданной области в пространстве [число пи

Print["Осцилляция поля магнитной индукции:"]
[печатать]
Animate[ParametricPlot3D[λ * GB[t], {r, 0, R}, {θ, 0, Pi}], {t, 0, 1000}];
[анимиро... [график параметрически заданной области в пространстве [число пи

Print["Траектория движения точки из положения (r,θ,φ)"]
[печатать]
α = 1.2 R
β = 0.3 Pi
    [число пи
γ = 0.4 Pi
    [число пи

Print["Время моделирования"]
[печатать]
T = 100
Print["Траектория первого стационарного поля смещения"]
[печатать]
v[r_, θ_, φ_] = P1
sol2 = NDSolve[{rt'[τ] == v[rt[τ], θt[τ], φt[τ]][[1]],
[численно решить ДУ
    θt'[τ] == v[rt[τ], θt[τ], φt[τ]][[2]] / rt[τ],
    φt'[τ] == v[rt[τ], θt[τ], φt[τ]][[3]] / (rt[τ] Cos[θt[τ]]),
    [косинус
    rt[0] == α, θt[0] == β, φt[0] == γ}, {rt, θt, φt}, {τ, 0, T}]
Plot[rt[τ] /. sol2, {τ, 0, T}]
[график функции]
Plot[θt[τ] /. sol2, {τ, 0, T}]
[график функции]
Plot[φt[τ] /. sol2, {τ, 0, T}]
[график функции]
Animate[ParametricPlot3D[Evaluate[
    [график параметрическ... [вычислить
    {rt[τ] * Sin[θt[τ]] * Cos[φt[τ]],
    [синус [косинус
    rt[τ] * Sin[θt[τ]] * Sin[φt[τ]], rt[τ] * Cos[θt[τ]]}
    [синус [синус [косинус
    /. sol2], {τ, 0, t}], {t, 0, T}];

```

```

Print["Траектория второго стационарного поля смещения"]
[печатать]
u[r_,  $\theta$ _,  $\phi$ _] = Q1
sol3 = NDSolve[{rs'[ $\tau$ ] == u[rs[ $\tau$ ],  $\theta$ s[ $\tau$ ],  $\phi$ s[ $\tau$ ]][[1]],
[численно решить ДУ]
   $\theta$ s'[ $\tau$ ] == u[rs[ $\tau$ ],  $\theta$ s[ $\tau$ ],  $\phi$ s[ $\tau$ ]][[2]]/rs[ $\tau$ ],
   $\phi$ s'[ $\tau$ ] == u[rs[ $\tau$ ],  $\theta$ s[ $\tau$ ],  $\phi$ s[ $\tau$ ]][[3]]/(rs[ $\tau$ ] Cos[ $\theta$ s[ $\tau$ ]]),
[косинус]
  rs[0] ==  $\alpha$ ,  $\theta$ s[0] ==  $\beta$ ,  $\phi$ s[0] ==  $\gamma$ }, {rs,  $\theta$ s,  $\phi$ s}, { $\tau$ , 0, T}]
Plot[rs[ $\tau$ ] /. sol3, { $\tau$ , 0, T}]
[график функции]
Plot[ $\theta$ s[ $\tau$ ] /. sol3, { $\tau$ , 0, T}]
[график функции]
Plot[ $\phi$ s[ $\tau$ ] /. sol3, { $\tau$ , 0, T}]
[график функции]
Animate[ParametricPlot3D[Evaluate[
[график параметрическ... [вычислить]
  {rs[ $\tau$ ] * Sin[ $\theta$ s[ $\tau$ ]] * Cos[ $\phi$ s[ $\tau$ ]],
[синус] [косинус]
  rs[ $\tau$ ] * Sin[ $\theta$ s[ $\tau$ ]] * Sin[ $\phi$ s[ $\tau$ ]], rs[ $\tau$ ] * Cos[ $\theta$ s[ $\tau$ ]]}
[синус] [синус] [косинус]
  /. sol3], { $\tau$ , 0, t}], {t, 0, T}]

```

Переменные сферической системы координат: $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$

Формулы перехода от криволинейной системы к декартовой

Радиус-вектор точки M(x, y, z)

Подвижный репер (\vec{i}_r , \vec{i}_θ , \vec{i}_ϕ):

Out[9]= {Cos[ϕ] Sin[θ], Sin[θ] Sin[ϕ], Cos[θ]}

Out[10]= {r Cos[θ] Cos[ϕ], r Cos[θ] Sin[ϕ], -r Sin[θ]}

Out[11]= {-r Sin[θ] Sin[ϕ], r Cos[ϕ] Sin[θ], 0}

Стационарные поля смещения вакуума:

Out[15]= Normalization

Проверка равенства спектральной задачи $\lambda * F[t] = \text{rot}F[t]$

Out[21]= {0, 0, 0}

Наименьшее собственное значение:

Out[23]= π

Радиус шара моделирования:

Out[25]= 1

Частота осцилляций нестационарного поля смещения вакуума

Out[27]= 0.1

Динамика поля электрической напряжённости:

Динамика поля магнитной индукции:

Осцилляция поля электрической напряжённости:

Осцилляция поля магнитной индукции:

Траектория движения точки из положения (r, θ, ϕ)

Out[37]= 1.2

Out[38]= 0.942478

Out[39]= 1.25664




Время моделирования

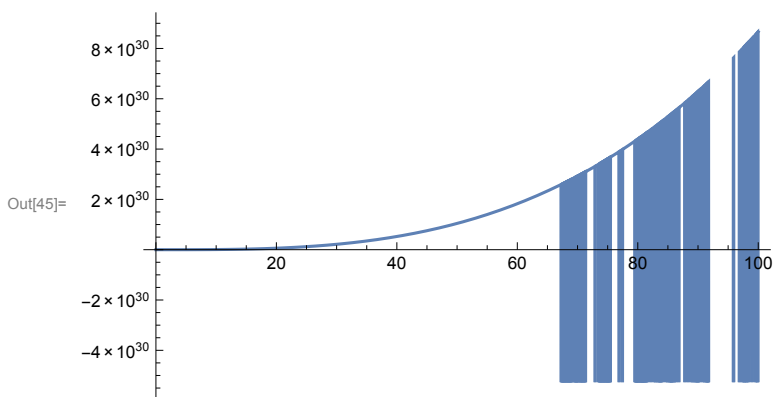
Out[41]= 100

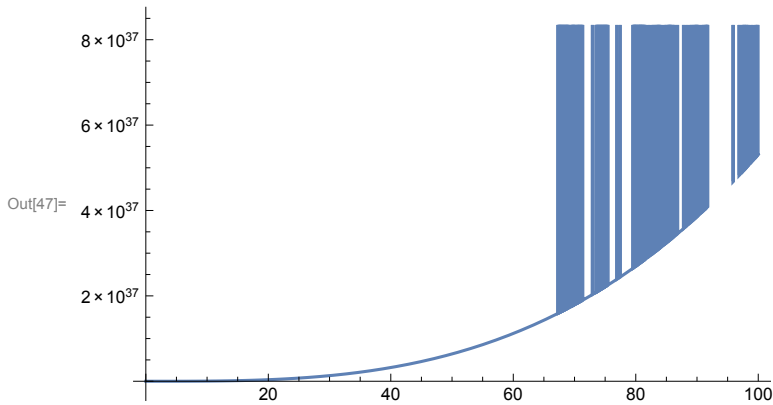
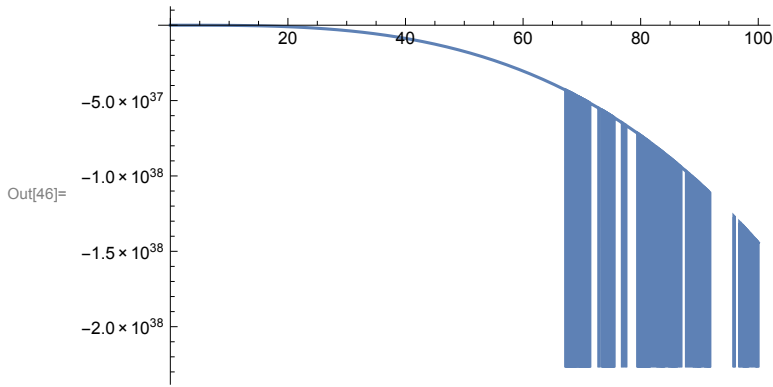
Траектория первого стационарного поля смещения

$$\text{Out[43]= } \left\{ \frac{2 \sin[\pi r]}{r^2 \sqrt{\pi (2 \pi^2 + 2 \pi \text{SinIntegral}[2 \pi])}}, \frac{2 \cos[\pi r] \cot[\theta] \sqrt{\frac{\pi}{2 \pi^2 + 2 \pi \text{SinIntegral}[2 \pi]}}}{r}, - \frac{2 \cot[\theta] \sin[\pi r] \sqrt{\frac{\pi}{2 \pi^2 + 2 \pi \text{SinIntegral}[2 \pi]}}}{r} \right\}$$

NDSolve::ndsiz : At $\tau == 1.2044261342393057$, step size is effectively zero; singularity or stiff system suspected. >>

Out[44]= { {rt → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.2}} Output: scalar } ,
 $\theta t \rightarrow$ InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.2}} Output: scalar } ,
 $\phi t \rightarrow$ InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.2}} Output: scalar }] }








Траектория второго стационарного поля смещения

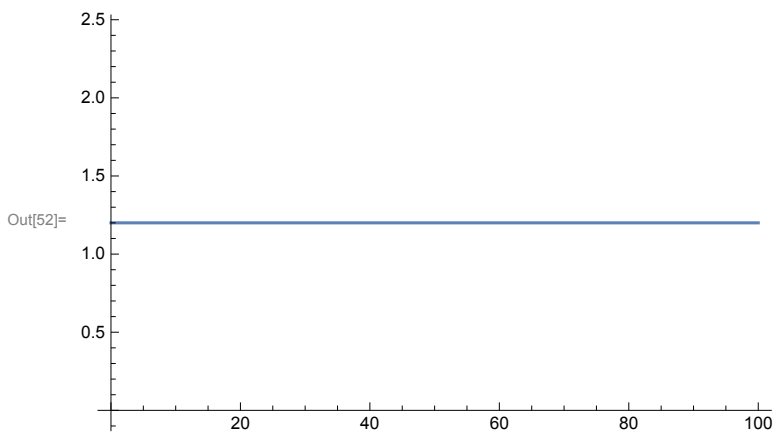
$$\text{Out[50]} = \left\{ 0, -\frac{\text{Cos}[\pi r] \text{Csc}[\theta]}{\sqrt{\pi} r}, \frac{\text{Csc}[\theta] \text{Sin}[\pi r]}{\sqrt{\pi} r} \right\}$$

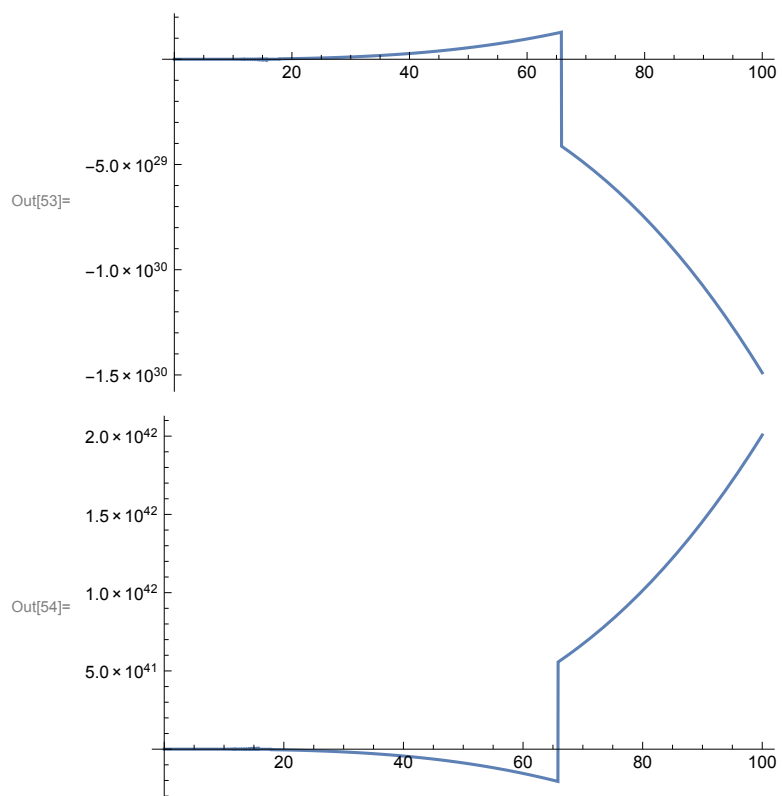
NDSolve::ndsiz : At $\tau == 1.8543789912664213$, step size is effectively zero; singularity or stiff system suspected. >>

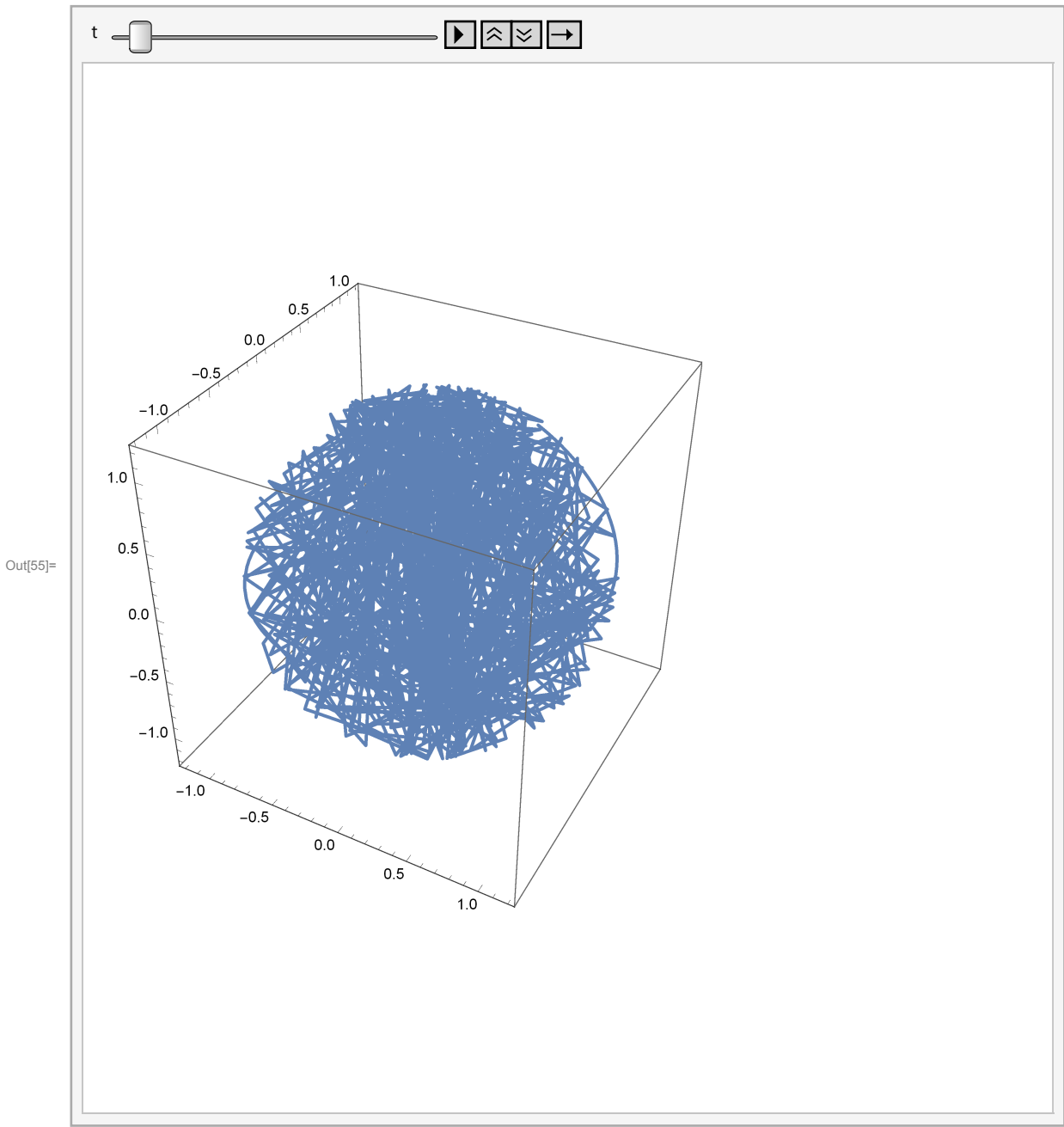
Out[51] = { {rs → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.85}} Output: scalar],

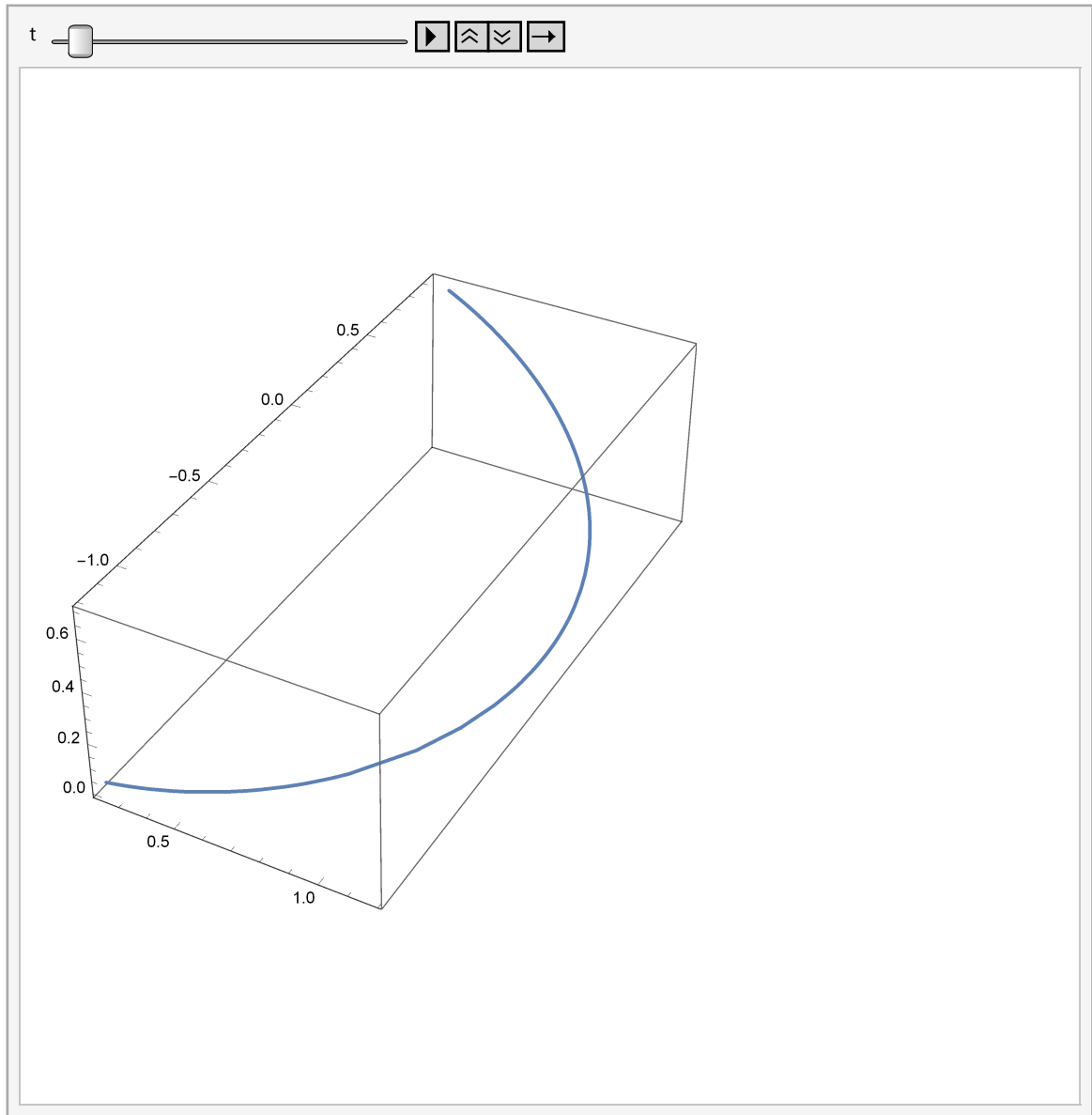
$\theta s \rightarrow$ InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.85}} Output: scalar],

$\phi s \rightarrow$ InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.85}} Output: scalar]] }









Траектория движения плазмы в шаре заданного радиуса

```
In[56]:= ClearAll[α, β, γ, R, T]
|очистить всё
Print["Формулы перехода от криволинейной системы к декартовой"];
|печатать
x = r * Sin[θ] Cos[φ];
|синус |косинус
y = r * Sin[θ] Sin[φ];
|синус |синус
z = r * Cos[θ];
|косинус
Print["Радиус-вектор точки M(x, y, z)"]
|печатать
```

```

[печатать]
M = {x, y, z};
Print["Единичный подвижный репер ( $\hat{i}_r, \hat{i}_\theta, \hat{i}_\phi$ ):"]
[печатать]
 $\hat{i}_r = \partial_r M$  // Simplify
[упростить]
 $\hat{i}_\theta = \partial_\theta M / r$  // Simplify
[упростить]
 $\hat{i}_\phi = \partial_\phi M / (r * \text{Sin}[\theta])$  // Simplify
[синус] [упростить]
Print["Функция  $\psi_1[s]$ :"]
[печатать]
 $\psi_1[s_] = (\text{Sin}[s] - s * \text{Cos}[s]) / s^2$ 
[синус] [косинус]
Print["Наименьший нуль  $\rho$  функции  $\psi_1(s)$ :"]
[печатать]
 $\rho = 4.49341$ 

Print["Спектральный параметр  $\lambda = \rho/R$ :"]
[печатать]
 $\lambda = \rho / R$ 

Print["Функция  $f[r]$ :"]
[печатать]
 $f[r_] = (\lambda * r)^{-1} \psi_1[\lambda r]$ 

Print["Функция  $g[r]$ :"]
[печатать]
 $g[r_] = (\lambda * r)^{-1} \int_0^r \text{Cos}[\lambda (r - t)] \psi_1[\lambda t] t^{-1} dt$ 
[косинус]

Print["Функция  $h[r]$ :"]
[печатать]
 $h[r_] = (\lambda * r)^{-1} \int_0^r \text{Sin}[\lambda (r - t)] \psi_1[\lambda t] t^{-1} dt$ 
[синус]

Print["Радиус шара R"]
[печатать]
 $R = 1.$ 

Print["График функции  $f(r)$ :"]
[печатать]
Plot[f[r], {r, 0, R}]
[график функции]
Print["График функции  $g(r)$ :"]
[печатать]
Plot[g[r], {r, 0, R}]
[график функции]
Print["График функции  $h(r)$ :"]
[печатать]

```

```

_печата_
Plot[h[r], {r, 0, R}]
_график функции
Print["Поле скоростей в декартовой
_печата_
    системе координат для квантового набора (n=1,m=1,k=0):"]
u[r_,  $\theta$ _,  $\phi$ _] := (Cos[ $\theta$ ] * f[r])  $\vec{i}_r$  - (Sin[ $\theta$ ] * g[r])  $\vec{i}_\theta$  + (Sin[ $\theta$ ] * h[r])  $\vec{i}_\phi$ ;
    _косинус          _синус          _синус
VectorPlot3D[u[r,  $\theta$ ,  $\phi$ ], {r, 0.01, 1}, { $\theta$ , 0, Pi},
    _число пи
    { $\phi$ , 0, 2 Pi}, VectorPoints  $\rightarrow$  8, VectorScale  $\rightarrow$  0.012]
    _числ... _число векторов          _масштаб векторов
Print["Траектория движения точки из положения (r, $\theta$ , $\phi$ )"]
_печата_
 $\alpha$  = 0.9 R
 $\beta$  = 0.5 Pi
    _число пи
 $\gamma$  = Pi
    _число пи
T = 5000
sol = NDSolve[
    _численно решить ДУ
    {rt'[t] == Cos[ $\theta$ t[t]] * f[rt[t]],
    _косинус
     $\theta$ t'[t] == -Sin[ $\theta$ t[t]] * g[rt[t]] / rt[t],
    _синус
     $\phi$ t'[t] == h[rt[t]] / rt[t],
    rt[0] ==  $\alpha$ ,  $\theta$ t[0] ==  $\beta$ ,  $\phi$ t[0] ==  $\gamma$ }, {rt,  $\theta$ t,  $\phi$ t}, {t, 0, T}]
Plot[rt[t] /. sol, {t, 0, T}]
_график функции
Plot[ $\theta$ t[t] /. sol, {t, 0, T}]
_график функции
Plot[ $\phi$ t[t] /. sol, {t, 0, T}]
_график функции
Animate[ParametricPlot3D[Evaluate[{rt[t] * Sin[ $\theta$ t[t]] * Cos[ $\phi$ t[t]],
_анимиро... _график параметрическ... _вычислить          _синус          _косинус
    rt[t] * Sin[ $\theta$ t[t]] * Sin[ $\phi$ t[t]], rt[t] * Cos[ $\theta$ t[t]]}
    _синус          _синус          _косинус
    /. sol], {t, 0, t}], {t, 0, T}]

```

Формулы перехода от криволинейной системы к декартовой

Радиус-вектор точки M(x, y, z)

Единичный подвижный репер (\vec{i}_r , \vec{i}_θ , \vec{i}_ϕ):

Out[64]= {Cos[ϕ] Sin[θ], Sin[θ] Sin[ϕ], Cos[θ]}

Out[65]= {Cos[θ] Cos[ϕ], Cos[θ] Sin[ϕ], -Sin[θ]}

Out[66]= {-Sin[ϕ], Cos[ϕ], 0}

Функция $\psi_1[s]$:

$$\text{Out[68]} = \frac{-s \cos[s] + \sin[s]}{s^2}$$

Наименьший нуль ρ функции $\psi_1(s)$:

$$\text{Out[70]} = 4.49341$$

Спектральный параметр $\lambda = \rho/R$:

$$\text{Out[72]} = \frac{4.49341}{R}$$

Функция $f[r]$:

$$\text{Out[74]} = \frac{1}{r^3} 0.0110223 R^3 \left(-\frac{4.49341 r \cos\left[\frac{4.49341 r}{R}\right]}{R} + \sin\left[\frac{4.49341 r}{R}\right] \right)$$

Функция $g[r]$:

$$\text{Out[76]} = \frac{1}{r^3} 0.222548 R \left(0.111274 r R \cos\left[\frac{4.49341 r}{R}\right] + (0.5 r^2 - 0.0247638 R^2) \sin\left[\frac{4.49341 r}{R}\right] \right)$$

Функция $h[r]$:

$$\text{Out[78]} = \frac{1}{r} 0.222548 R \left(-0.5 \cos\left[\frac{4.49341 r}{R}\right] + \frac{0.111274 R \sin\left[\frac{4.49341 r}{R}\right]}{r} \right)$$

Радиус шара R

$$\text{Out[80]} = 1.$$

График функции $f(r)$:

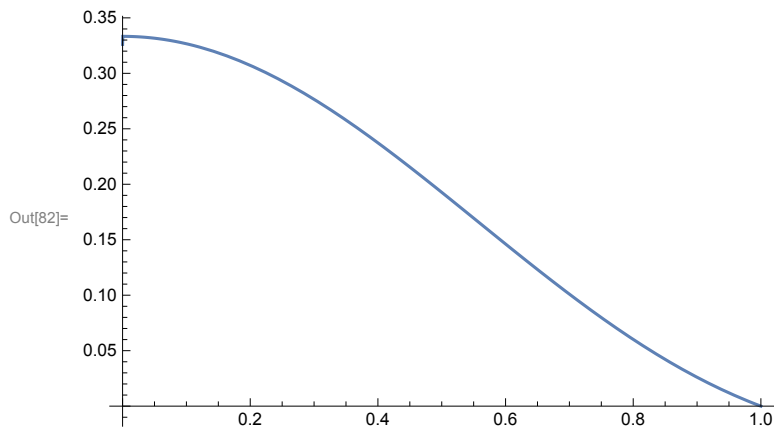


График функции $g(r)$:

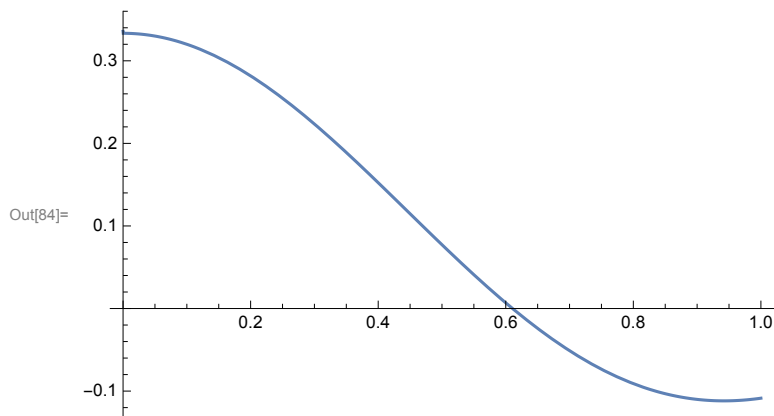
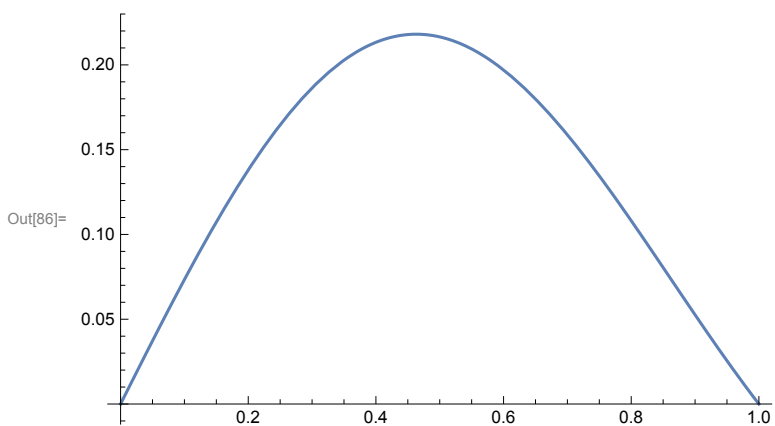
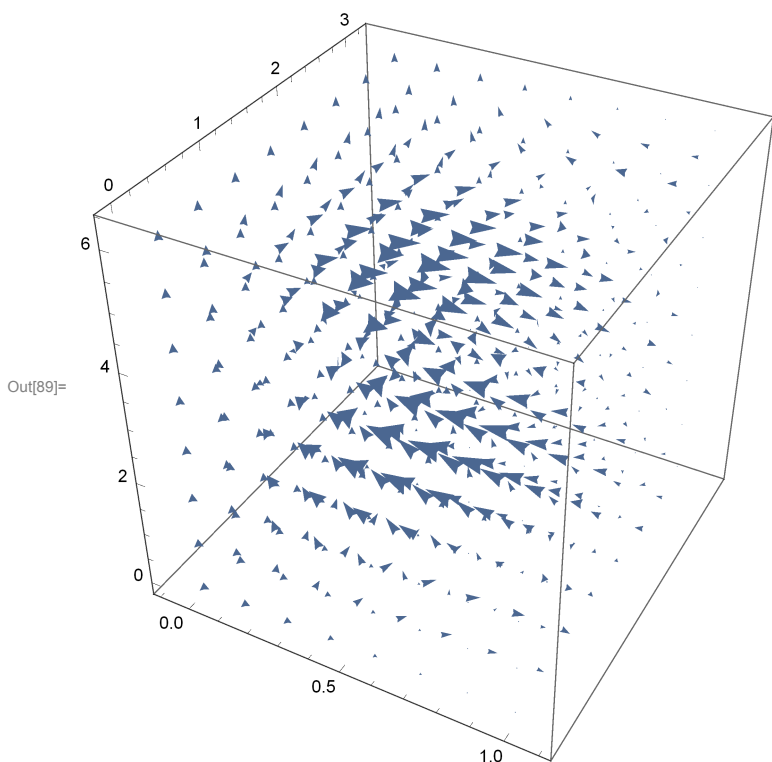


График функции $h(r)$:



Поле скоростей в декартовой системе координат для квантового набора $(n=1, m=1, k=0)$:



Траектория движения точки из положения (r, θ, ϕ)


Out[91]= 0.9


Out[92]= 1.5708


Out[93]= π

Out[94]= 5000

```

Out[95]= {{rt → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 5.00 × 103}}  
Output: scalar ],  

θt → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 5.00 × 103}}  
Output: scalar ],  

φt → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 5.00 × 103}}  
Output: scalar ]}}

```

